

MOUT126 : Traitement du Signal

BULOUP Frank
SERRES Julien

Aix Marseille Université
Institut des Sciences du Mouvement

13 Janvier 2015



INSTITUT ///////////////
DES SCIENCES ETIENNE
DU MOUVEMENT JULES
//////////////////// MAREY

Organisation du cours

- Deux parties : signal et système
- Sept séances en salle informatique
- Présentation des notions théoriques
- Applications pratiques sur papier ou sur Matlab
- Un ou deux contrôles continus (20%)
- Un examen final de deux heures (80%)

Références

- Le logiciel libre Octave GNU (peut remplacer Matlab)
<http://octave.sourceforge.net>
- La webtv de l'enseignement supérieur
<http://www.canal-u.tv>
 - Chapitre "Leçons de choses" - Partie 4 (Trigo)
 - Nombres complexes - Parties 1 à 4 + exercices
- Le site de l'académie en ligne
<http://www.academie-en-ligne.fr>
→ Lycée → Terminale S → Mathématique → Ensemble des nombres complexes
- Les sites :
 - <http://www.dspguru.com>
 - <http://www.dspguide.com/pdfbook.html>
 - <http://ocw.mit.edu/resources/res-6-008-digital-signal-processing-spring-2011>

Pourquoi étudier le traitement du signal ?

Pourquoi étudier le traitement du signal ?

Définition

Le traitement du signal est la discipline qui développe et étudie les techniques de traitement, d'analyse et d'interprétation des signaux

Pourquoi étudier le traitement du signal ?

Définition

Le traitement du signal est la discipline qui développe et étudie les techniques de traitement, d'analyse et d'interprétation des signaux

C'est donc forcément utile en analyse du mouvement :
après acquisition, enregistrement des signaux,
il faut bien passer à l'analyse !

Acquisition des signaux : MOUT104

Première Partie

- 1 Signal discret - Aspect fréquentiel
 - Représentation fréquentielle des signaux
 - Transformées de Fourier Discrète et Rapide (TFD, TFR)
 - Transformée en Z

Mais dans la majorité des cas pratiques :

- on enregistre des phénomènes transitoires, non périodique
- les signaux sont discrets, sur ordinateur, issus d'une acquisition de données (Cf. MOUT104)

À quoi peut donc bien servir la série de Fourier ? => TFD

Mais dans la majorité des cas pratiques :

- on enregistre des phénomènes transitoires, non périodique
- les signaux sont discrets, sur ordinateur, issus d'une acquisition de données (Cf. MOUT104)

À quoi peut donc bien servir la série de Fourier ? => TFD

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

- La période T_0 correspond à la durée de l'enregistrement plus un pas d'échantillonnage : NT_e (T_e étant la période ou le pas d'échantillonnage)
- La sommation n'est plus continue mais discrète sur tous les échantillons acquis
- La variable t est discrétisée et se transforme en nT_e
- dt correspond au pas d'échantillonnage T_e

On obtient alors la Transformée de Fourier Discrète :

$$S(k) = \frac{1}{NT_e} \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_e) e^{-2i\pi k \frac{1}{NT_e} nT_e T_e}$$

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

$$S(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-2i\pi \frac{kn}{N}}$$

On obtient alors la Transformée de Fourier Discrète :

$$S(k) = \frac{1}{NT_e} \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_e) e^{-2i\pi k \frac{1}{NT_e} nT_e T_e}$$

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

$$S(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-2i\pi \frac{kn}{N}}$$

Transformée de Fourier Discrète Inverse (TFDI)

Il existe une transformée inverse

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S(k) e^{2i\pi \frac{kn}{N}}$$

Remarques

- Dans la série de Fourier, les fréquences sont des multiples de f_0 . Dans la TFD les fréquences sont des multiples de $\frac{F_e}{N}$
- On dit que $\frac{F_e}{N}$ est la résolution fréquentielle de la TFD
- Il existe une méthode rapide de calcul des TFD : l'algorithme de Transformée de Fourier Rapide (Fast Fourier Transform)
- $\rho(k)$ et $\phi(k)$ se calculent de la même manière que pour la série de Fourier

Remarques

- Dans la série de Fourier, les fréquences sont des multiples de f_0 . Dans la TFD les fréquences sont des multiples de $\frac{F_e}{N}$
- On dit que $\frac{F_e}{N}$ est la résolution fréquentielle de la TFD
- Il existe une méthode rapide de calcul des TFD : l'algorithme de Transformée de Fourier Rapide (Fast Fourier Transform)
- $\rho(k)$ et $\phi(k)$ se calculent de la même manière que pour la série de Fourier

Autres définitions

Ces définitions des TFD ne sont pas uniques. Le facteur $\frac{1}{N}$ peut se trouver dans la transformée inverse

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)e^{-2i\pi \frac{kn}{N}} \quad s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k)e^{2i\pi \frac{kn}{N}}$$

Exercice TFD

- 1 Exprimer $\overline{S(k)}$ en fonction de $S(-k)$ lorsque $s(t)$ est un signal réel
- 2 En déduire les relations liant $\rho(k)$ à $\rho(-k)$ et $\phi(k)$ à $\phi(-k)$
- 3 Si on a acquis un signal à la fréquence F_e , quelle est la fréquence maximale observable (cf. MOUT104) ?
- 4 Dans les expressions précédentes de la TFD, quelle doit-être la fréquence maximale ?
- 5 Conclusions ?

Exercice TFD

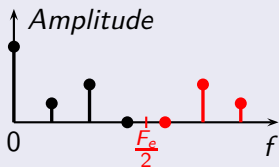
- 1 Exprimer $\overline{S(k)}$ en fonction de $S(-k)$ lorsque $s(t)$ est un signal réel
- 2 En déduire les relations liant $\rho(k)$ à $\rho(-k)$ et $\phi(k)$ à $\phi(-k)$
- 3 Si on a acquis un signal à la fréquence F_e , quelle est la fréquence maximale observable (cf. MOUT104) ?
- 4 Dans les expressions précédentes de la TFD, quelle doit-être la fréquence maximale ?
- 5 Conclusions ?

Représentation bilatérale de la TFD

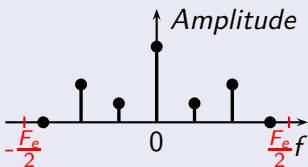
$S(k)$ possède une certaine symétrie par rapport à l'origine et ne peut contenir d'énergie à des fréquences supérieures à $\frac{F_e}{2}$. Une représentation physiquement cohérente correspond donc au **spectre bilatéral** : le signal comporte de l'énergie entre $-\frac{F_e}{2}$ et $\frac{F_e}{2}$.

Spectre de module bilatéral - Fonction paire

Ce que donne la TFD

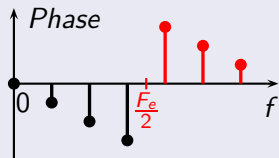


Ce que l'on a en réalité

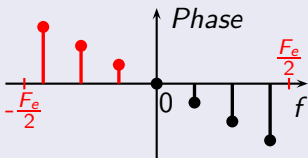


Spectre de phase bilatéral - Fonction impaire

Ce que donne la TFD



Ce que l'on a en réalité



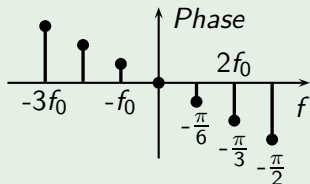
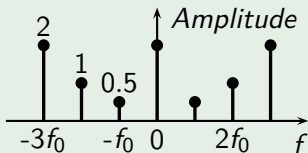
Exercices représentation spectrale monolatérale

Représenter les spectres bilatéraux des signaux suivants :

- $s_1(t) = 3$
- $s_2(t) = 6\sin(2\pi t)$
- $s_3(t) = 1 + 2\cos(10\pi t) + 4\cos(20\pi t)$
- $s_4(t) = \cos(100\pi t) + \cos^2(100\pi t)$

Exercice représentation spectrale bilatérale

Donner l'expression temporelle du signal dont les représentations spectrales sont les suivantes :



Exercice TFR (FFT) sur Matlab

- Lire le documentation des fonctions **fft** et **ifft** de Matlab
- Charger le fichier *mi2_bute_ros.wav*
- Calculer le module et la phase de la transformée de Fourier du signal
- Définir le vecteur fréquence associé à ce signal
- Lire les documentations de **fftshift** et **unwrap**
- Tracer les spectres bilatéraux de ce signal. Quelles informations en tirez-vous ?
- Faire de même avec les données fournies

Transformée en Z

En posant $z = e^{2i\pi \frac{k}{N}}$, on obtient la transformée en Z

$$S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)z^{-n}$$

Exercice sur le théorème du retard

Calculer les TZ des signaux suivants :

- $x(n-1)$
- $x(n-2)$
- $x(n-3)$
- Généraliser